

§ PHẦN 1: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. Lý thuyết: Ngoài các kiến thức cơ bản về giới hạn của hàm số có trong SGK Giải tích lớp 11 và lớp 12, cần lưu ý thêm một vài nội dung sau:

1) Khi gặp các dạng vô định ta thường “khử” chúng bằng các cách sau:

- Phân tích nhân tử - đặt thừa chung
- Nhân, chia lượng liên hợp
- Biến đổi tổng, tích
- Thêm bớt, tách một hàm thành tổng nhiều hàm
- Đặt ẩn phụ
- ...

2) Cần lưu ý và vận dụng linh hoạt các công thức sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty (a > 1), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 (a > 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 (0 < a < 1), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg_a x = +\infty (a > 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg_a x = -\infty (0 < a < 1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg_a x = -\infty (a > 1), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg_a x = +\infty (0 < a < 1)$$

II. Một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 1: (Phân tích nhân tử, đặt thừa chung) Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x^2 - 1}$

$$\text{Giải:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + \dots + (x^n-1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + (x+1) + \dots + (x^{n-1} + \dots + 1)}{x+1} = \frac{1+2+\dots+n}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$

Ví dụ 2: (Thêm bớt, nhân chia lượng liên hợp) Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x}$

$$\text{Giải:} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x^2+3}-2) + (x^3-3x+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} + \frac{x^3-3x+2}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} + x^2 + x - 2} = 2$$

Ví dụ 3: (Đặt ẩn phụ) Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[9]{9x+1} - 1}{x}$

$$\text{Giải:} \quad \text{Đặt } t = \sqrt[9]{9x+1}. \text{ Khi đó } x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[9]{9x+1} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{t^9-1} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{9}{t^8 + t^7 + \dots + 1} = 1$$

Ví dụ 4: (Biến đổi lượng giác) Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$

$$\text{Giải:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) + \sin a - 2\sin(a+x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(a+x)\cos x - 2\sin(a+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin(a+x)[1-\cos x]}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \sin(a+x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\sin a$$

$\sin a$

Ví dụ 5: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - \ln(3x+1) - 1}{x}$

Giải: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - \ln(3x+1) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(5 \frac{e^{5x} - 1}{5x} - 3 \frac{\ln(3x+1)}{3x} \right) = 5 - 3 = 2$

Ví dụ 6: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - \cos x}{x^2}$

Giải: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2 \ln 3} - 1}{x^2 \ln 3} \cdot \ln 3 + \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} \right) = \ln 3 + \frac{1}{2}$$

Ví dụ 7: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^x$

Giải: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+1}{2}} \right)^{\frac{x+1}{2}} \right]^{\frac{2x}{x+1}} = e^2$

Ví dụ 8: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 3x \cos 4x}{x^2}$

Giải: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 3x \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x \cos 4x (1 - \cos x) + \cos 4x (1 - \cos 3x) + 1 - \cos 4x}{x^2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x \cos 4x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x \cdot 2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 8 = 13$$

Ví dụ 9: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x}$

Giải: Với $x \neq 0$, ta có $\frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} = \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{x} \cdot \frac{\sqrt{3x+4} - 2 - x}{x} =$

$$= \left(\frac{1 - \sqrt{2x+1}}{x} + \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3x+4} - 2}{x} - 1 \right) = \left(\frac{-2}{1 + \sqrt{2x+1}} + \frac{\sin x}{x} \right) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+4} + 2} - 1 \right)$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1} + \sin x}{\sqrt{3x+4} - 2 - x} = 0$

III. Bài tập: Tính

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$ (ĐS $\frac{13}{12}$ ----ĐHQG Khối A-1997)

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x}$ (ĐS 1 ----ĐHTM -1999)
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}}$ (ĐS 8 – ĐHTN 2000)
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$ (ĐS $\frac{3}{2}$ ----ĐHQG-1998)
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$ (ĐS 1 ----ĐHQGHN Khối D-2001)
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$ (ĐS $\frac{7}{12}$ ----ĐHSPHN Khối B,D-2001)
7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ (ĐS $\frac{1}{12}$ ----ĐHSPHN Khối A-2001)
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$ (ĐS $-\frac{5}{24}$ ----ĐH Tài chính kế toán HN -2001)
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$ (ĐS $\frac{1}{2}$ ----ĐH Thủy lợi Khối A-2001)
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$ (ĐS 0 ----ĐHHH-1997)
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ (ĐS $\frac{1}{4}$ ----ĐHHH-2000)
12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{\tan(x-1)}$ (ĐS $-\frac{7}{4}$)
13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x$ (ĐS 1)
15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\tan(x-1)}$ (ĐS -2 ----ĐHDL Hải phòng A-2000)
16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{98}{83} \left(\frac{1 - \cos 3x \cdot \cos 5x \cdot \cos 7x}{\sin^2 7x} \right)$ (ĐS 1 ----ĐHAN A-2000)
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{2x+1}$ (ĐS e^2 ----HVKTMM-1999)
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|1 - |1 + \sin 3x||}{\sqrt{1 - \cos x}}$ (ĐS $\frac{6}{\sqrt{2}}$ ----ĐHQGHN-Khối A-1997)
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$ (ĐS $\frac{1}{2}$)
25. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x}$ (ĐS $ma + nb$)
20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-1})$ (ĐS 0)
26. Tính $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}$ (ĐS $-\sqrt{2}$)
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$ (ĐS $a - b$)
27. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{\sin x \cdot \cos 3x}$ (ĐS $\ln \frac{3}{2}$)

22. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{6x+1}{2x+1}}{x}$ (ĐS 4)

23. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x \cdot \cos 5x}{x^2}$ (ĐS 9)

24. Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}$ (ĐS e^2)

§ PHẦN 2: NGUYÊN HÀM

NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

- Cho hàm số f xác định trên K . Hàm số F đgl **nguyên hàm** của f trên K nếu:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in K$$

- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì **họ nguyên hàm** của $f(x)$ trên K là:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}.$$

- Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .

2. Tính chất

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \quad (k \neq 0)$

3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

$\int 0dx = C$ $\int dx = x + C$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ $\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$ $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C, \quad (a \neq 0)$ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$

4. Phương pháp tính nguyên hàm

a) Phương pháp đổi biến số

Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

b) Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

VẤN ĐỀ 1: Tính nguyên hàm bằng cách sử dụng bảng nguyên hàm

Biến đổi biểu thức hàm số để sử dụng được bảng các nguyên hàm cơ bản.

Chú ý: Để sử dụng phương pháp này cần phải:

- Nắm vững bảng các nguyên hàm.
- Nắm vững phép tính vi phân.

Ví dụ 1.1: Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 7^{-2x}$

Giải: $\int (\sqrt[5]{x^2} + 7^{-2x}) dx = \int \left(x^{\frac{2}{5}} + 7^{-2x} \right) dx = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + \frac{7^{-2x}}{(-2)\ln 7} + C = \frac{5}{7} \sqrt[5]{x^7} - \frac{7^{-2x}}{2\ln 7} + C$

Ví dụ 1.2: Tìm nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \cos^3 x$

Giải: $\int \cos^3 x dx = \int \left(\frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x \right) dx = \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + C$

Ví dụ 1.3: Tìm hàm số $f(x)$ biết: $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ và $f(-1) = 2$; $f(1) = 4$; $f'(1) = 0$.

Giải: Ta có: $f(x) = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = a \frac{x^2}{2} - \frac{b}{x} + C$

Mà: $\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(1) = 4 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b + C = 2 \\ \frac{a}{2} - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ C = \frac{5}{2} \end{cases}$

Vậy: $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}$

VẤN ĐỀ 2: Tính nguyên hàm $\int f(x)dx$ bằng phương pháp đổi biến số

• **Dạng 1:** Nếu $f(x)$ có dạng: $f(x) = g[u(x)] \cdot u'(x)$ thì ta đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$.

Khi đó: $\int f(x)dx = \int g(t)dt$, trong đó $\int g(t)dt$ dễ dàng tìm được.

Chú ý: Sau khi tính $\int g(t)dt$ theo t , ta phải thay lại $t = u(x)$.

• **Dạng 2:** Thường gặp ở các trường hợp sau:

$f(x)$ có chứa	Cách đổi biến
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = a \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ hoặc $x = a \cot t, \quad 0 < t < \pi$

Ví dụ 2.1: Tính $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$

Giải: Đặt $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{u^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}{3} + C$$

Ví dụ 2.2: Tính $I = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

Giải: Đặt $u = \tan x \Rightarrow du = \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$I = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

Ví dụ 2.3 : Tính $I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

Giải: Đặt $x = a \tan t \Rightarrow dx = a(\tan^2 t + 1) dt$

$$I = \int \frac{a(\tan^2 t + 1) dt}{a^2(\tan^2 t + 1)} = \frac{1}{a} \int dt = \frac{1}{a} t + C = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Ví dụ 2.4 : Tính $I = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}$

Ta có $I = \int \frac{1}{(x+1)^2 + 2} dx$ Đặt

$$x+1 = \sqrt{2} \tan t \Rightarrow dx = \sqrt{2}(\tan^2 t + 1) dt \Rightarrow I = \int \frac{\sqrt{2}(\tan^2 t + 1) dt}{2(\tan^2 t + 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int dt = \frac{\sqrt{2}}{2} t + C$$

Vậy $I = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$

VẤN ĐỀ 3: Tính nguyên hàm bằng phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Với $P(x)$ là đa thức của x , ta thường gặp các dạng sau:

	$\int P(x).e^x dx$	$\int P(x). \cos x dx$	$\int P(x). \sin x dx$	$\int P(x). \ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$	$\sin x dx$	$P(x)$

Ví dụ 3.1 : Tính $I = \int \frac{\ln x}{x^3} dx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{1}{2x^2} \end{cases}$

$$I = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(-2)x^2} + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = -\frac{1}{4x^2} (2\ln x + 1) + C$$

Ví dụ 3.2 : Tính $I = \int x^2 e^{2x+1} dx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x+1} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x+1} \end{cases}$

$$I = \frac{1}{2} x^2 e^{2x+1} - \int x e^{2x+1} dx$$

$$J = \int x e^{2x+1} dx$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x+1} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x+1} \end{cases}$

$$J = \frac{1}{2} x e^{2x+1} - \frac{1}{2} \int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} x e^{2x+1} - \frac{1}{4} e^{2x+1} + C$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2}x^2 e^{2x+1} - \frac{1}{2}x e^{2x+1} + \frac{1}{4}e^{2x+1} + C$$

Ví dụ 3.3 : Tính $I = \int \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2}$

Giải : Đặt $\begin{cases} u = x^4 \\ dv = \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4x^3 dx \\ v = -\frac{1}{4(1+x^4)} \end{cases}$

$$I = \frac{-x^4}{4(1+x^4)} + \int \frac{x^3 dx}{1+x^4} = \frac{-x^4}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \int \frac{d(1+x^4)}{1+x^4} = \frac{-x^4}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C$$

VẤN ĐỀ 4: Tính nguyên hàm bằng phương pháp dùng nguyên hàm phụ

Để xác định nguyên hàm của hàm số $f(x)$, ta cần tìm một hàm $g(x)$ sao cho nguyên hàm của các hàm số $f(x) \pm g(x)$ dễ xác định hơn so với $f(x)$. Từ đó suy ra nguyên hàm của $f(x)$.

Bước 1: Tìm hàm $g(x)$.

Bước 2: Xác định nguyên hàm của các hàm số $f(x) \pm g(x)$, tức là:

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = A(x) + C_1 \\ F(x) - G(x) = B(x) + C_2 \end{cases} \quad (*)$$

Bước 3: Từ hệ (*), ta suy ra $F(x) = \frac{1}{2}[A(x) + B(x)] + C$ là nguyên hàm của $f(x)$.

Ví dụ 4.1 : Tính $I = \int \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x}$

Giải : Gọi $J = \int \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}$

Ta có : $I + J = x + C_1$

$$I - J = -\ln|\sin x + \cos x| + C_2$$

Suy ra $I = \frac{x - \ln|\sin x + \cos x|}{2} + C$

Ví dụ 4.2 : Tính $I = \int \frac{e^{-x} dx}{e^x - e^{-x}}$

Giải : Đặt $J = \int \frac{e^x dx}{e^x - e^{-x}}$

Ta có : $J - I = x + C_1$

$$J + I = \ln|e^x - e^{-x}| + C_2$$

Suy ra : $I = \frac{\ln|e^x - e^{-x}| - x}{2} + C$

VẤN ĐỀ 5: Tính nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

1. $f(x)$ là hàm hữu tỉ: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

- Nếu bậc của $P(x) \geq$ bậc của $Q(x)$ thì ta thực hiện phép chia đa thức.
- Nếu bậc của $P(x) <$ bậc của $Q(x)$ và $Q(x)$ có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích $f(x)$ thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định).

Chẳng hạn:
$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$$

2. $f(x)$ là hàm vô tỉ

$$+ f(x) = R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \rightarrow \text{đặt } t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$+ f(x) = R\left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\right) \rightarrow \text{đặt } t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$$

• $f(x)$ là hàm lượng giác

Ta sử dụng các phép biến đổi lượng giác thích hợp để đưa về các nguyên hàm cơ bản. Chẳng hạn:

$$+ \frac{1}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \cdot \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a) \cdot \sin(x+b)}, \left(\text{sử dụng } 1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} \right)$$

$$+ \frac{1}{\cos(x+a) \cdot \cos(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)} \cdot \frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\cos(x+a) \cdot \cos(x+b)}, \left(\text{sử dụng } 1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)} \right)$$

$$+ \frac{1}{\sin(x+a) \cdot \cos(x+b)} = \frac{1}{\cos(a-b)} \cdot \frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a) \cdot \cos(x+b)}, \left(\text{sử dụng } 1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)} \right)$$

+ Nếu $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \cos x$

+ Nếu $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \sin x$

+ Nếu $R(-\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ thì đặt $t = \tan x$ (hoặc $t = \cot x$)

Ví dụ 5.1 : Tính $I = \int \frac{dx}{x(x+1)}$

Giải : $I = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$

Ví dụ 5.2 : Tính $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$

Giải : Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow 2tdt = dx$

$$I = \int \frac{2tdt}{1+t}$$

Đặt $u = 1+t \Rightarrow du = dt$

$$I = 2 \int \frac{u-1}{u} du = 2(u - \ln|u|) + C$$

$$= 2(1+t - \ln|1+t|) + C = 2(1 + \sqrt{x+1} - \ln|1 + \sqrt{x+1}|) + C$$

Ví dụ 5.3 : Tính $I = \int \frac{(1-\sin x) dx}{\cos x}$

Giải :

$$I = \int \frac{1}{\cos x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = M - N$$

$$M = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C_1$$

$$N = -\ln|\cos x| + C_2$$

$$I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + \ln|\cos x| + C$$

§ PHẦN 3:

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Cơ sở của phương pháp đổi biến số là định lý sau đây:

Định lý: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hàm số $x = u(t)$ có đạo hàm $u'(t)$ liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Hàm số hợp $f[u(t)]$ xác định trên đoạn $[\alpha; \beta]$ và $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$

$$\text{b thì: } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[u(t)] u'(t) dt$$

1. Đổi biến số dạng 1:

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, để tính $\int_a^b f(x) dx$ ta thực hiện các bước sau:

* Bước 1: Đặt $x = u(t)$ và tính $dx = u'(t) dt$

* Bước 2: Đổi cận $x = a \Rightarrow t = \alpha, x = b \Rightarrow t = \beta$

* Bước 3: $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[u(t)] u'(t) dt$

Ví dụ 1: Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$

Đặt $x = a \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow dx = a \cos t dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; \quad x = \frac{a}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

Do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a \cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

Ví dụ 2: Tính $J = \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$

Đặt $x = a \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow dx = a(1 + \tan^2 t) dt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Do đó $J = \int_0^{\pi/4} \frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2 + a^2 \tan^2 t} dt = \frac{1}{a} \int_0^{\pi/4} dt = \frac{1}{a} t \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4a}$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} dx$ Đặt $\sqrt{x} = \cos t$; $I = 2 - \frac{\pi}{2}$

Một số bài tập đổi biến số dạng 1

1. $\int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+2} dx$ 2. $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{dx}{1+\sqrt{-x(1+x)}}$ 3. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

4. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx$ 5. $\int_0^2 (x-2)\sqrt{\frac{4+x}{4-x}} dx$ 6. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$

7. $\int_0^2 \frac{x^3+2x^2+4x+9}{x^2+4} dx$ 8. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-2x+2}$

9. $\int_0^1 \frac{3dx}{1+x^3}$. HD: $\frac{3}{1+x^3} = \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{C}{x^2-x+1}$. ĐS: $\ln 2 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

10. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{4-\cos^2 x}$. HD: $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{4-\cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{3+\sin^2 x}$. Đặt $x = \pi - t$ thì được $I = -\pi \int_0^{\pi} \frac{d(\cos t)}{4-\cos^2 t} - I$.

ĐS: $I = \frac{\pi \ln 9}{8}$. 11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{3+\sin 2x}} dx$. ĐS: $\frac{\pi}{6}$.

12. $L = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{9+2x^2}}{x^2} dx$ Đặt $\sqrt{2}x = 3 \tan t \Rightarrow L = \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t \sin^2 t}$

4) $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$ Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$

Ta có: $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos t - 2 \sin t}{(\sin t + \cos t)^3} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$. Suy ra:

$2D = D + D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{4})} dx = \frac{1}{2} \tan(x-\frac{\pi}{4}) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

2. Đổi biến số dạng 2:

Để tính tích phân $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx$ ta thực hiện các bước sau

Bước 1: đặt $t = u(x)$ và $dt = u'(x)dx$

Bước 2: đổi cận $x = a \Rightarrow t = u(a) = \alpha$

$x = b \Rightarrow t = u(b) = \beta$

Bước 3: $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

a/ $I = \int_1^e \frac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x} \cdot \ln x}{x} dx$

b/ $J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2} dx$

Giải

a/ tính I. Đặt $t = 1 + \ln^2 x \Rightarrow dt = 2 \frac{\ln x}{x} dx$

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = 2$

Do đó $I = \int_1^2 \sqrt[3]{t} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_1^2 t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{t^4} \right]_1^2 = \frac{3}{8} (2\sqrt[3]{2} - 1)$

b/

tính

J

Đặt $t = 1 + \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx$

Đổi cận $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2$

$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = 1 + \sqrt{3}$

Do đó $J = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2} = \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_2^{1+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

• Một số bài tập đổi biến dạng 2:

1, $\int_1^2 \frac{(1-\frac{1}{x^2})dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2+1}}$

2, $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2x+3}}$

3, $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$

4, $\int_0^1 \sqrt{\frac{3-x}{1+x}} dx$

5, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+8)^3}}$

6, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$

7, $\int_1^2 \frac{(x^2-1)dx}{x\sqrt{x^4+3x^2+1}}$

8, $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}}$

9) $A = \int_{-8}^{-7} \frac{\sqrt[3]{x+7}}{x-1} dx$

HD: Đặt $t = \sqrt[3]{x+7}$, ta được $A = 3 \int_{-1}^0 \frac{t^3}{t^3-8} dt = 3 \int_{-1}^0 dt + 24 \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^3-8}$

Ta có: $\frac{1}{t^3-8} = \frac{1}{(t-2)(t^2+2t+4)} = \frac{5}{t-2} - \frac{5}{t^2+2t+4} - \frac{1}{3}$

10) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cot^4 x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cot^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cot^4 x}{-\sin^2 x (1 - \cot^2 x)} dx$

Đặt $t = \cot x$

11) $I = \int_{-1}^0 \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$ Đặt $t = \sqrt[6]{x+1} \Rightarrow K = 6 \int_0^1 \frac{t^5-t^8}{1+t^2} dt$

12) $M = \int_0^{\frac{63}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt{2x+1}}$

Đặt $t = \sqrt[6]{2x+1}$

13) $N = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x \sin^4 x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x) \sin^4 x} dx$

Đặt

$$t = \sin x \Rightarrow N = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{t^4(1-t^2)} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-t^4+t^4}{t^4(1-t^2)} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1+t^2}{t^4} + \frac{1}{1-t^2} \right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) \right) dt$$

$$14) \quad P = \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \int_1^2 \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int_1^2 \frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} dx \quad \text{Đặt } t = x + \frac{1}{x}$$

$$15) \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\sin^4 x - 3\sin^2 x + 3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x + \cos^2 x + 1} dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow Q = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-t^2}{t^4+t^2+1} dt = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}+1} dt = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-1} dt \quad \text{Đặt } u = t + \frac{1}{t}$$

$$16) \quad S = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$$

$$\text{Đặt } u = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow du = \frac{2}{(1-x)^2} dx \Rightarrow du \frac{2}{1-x^2} \frac{1+x}{1-x} dx \Rightarrow \frac{du}{2u} = \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$\text{Hoặc đặt } u = \ln \frac{1+x}{1-x}, du = \frac{2}{1-x^2} dx$$

$$17) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}(3x+1)}. \text{ Đặt } t = x+1, \text{ dẫn đến } \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}t(3t-2)}. \text{ Đặt } u = \sqrt{t}, \text{ được}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{3u^2-2} - \frac{1}{u^2} \right) du$$

$$18) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\sqrt{2}\cos x}. I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x + \sin x}. \text{ Đặt } t = \tan \frac{x}{2}$$

$$19) \quad I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^3+\sqrt{1+x^6}}. \text{ Nhân tử, mẫu cho lượng liên hợp, được:}$$

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx + \int_{-1}^1 \frac{1-\sqrt{1+x^6}}{2x^3} dx = I_1 + I_2. \text{ Tính } I_2 \text{ với } t = -x \text{ thì } I_2 = 0$$

• Một số phép đổi biến đặc biệt

Ví dụ 1: 1/ Chứng minh rằng với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$ ta có

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$2/ \text{ Tính } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cot x) dx$$

Ví dụ 2: 1/ cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0;1]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

$$2/ \text{ a, Tính } I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad \text{ b, Tính } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{1 + \sin x}$$

Ví dụ: 3/ Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0;1]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

$$2/ \text{ Tính các tích phân sau: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx \quad \text{ và } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

Ví dụ 4: 1/ Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2a]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)] dx$$

$$2/ \text{ Tính } I = \int_0^{3\pi} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx$$

Ví dụ 5: 1/ Cho hàm số $f(x)$ liên tục và $f(a+b-x) = f(x)$

$$\text{Chứng minh rằng } \int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

$$2/ \text{ Tính } I = \int_0^1 x(\sqrt{2+x} + \sqrt{3-x}) dx$$

§ PHẦN 4: TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

I. **Công thức:** $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (*)$

II. Các dạng tích phân thường gặp:

Dạng 1: Hàm dưới dấu tích phân có một trong các dạng:

$P(x) \cdot \sin(ax+b)$, $P(x) \cdot \cos(ax+b)$, $P(x) \cdot e^{(ax+b)}$ trong đó $P(x)$ thường là đa thức, có thể là phân thức hữu tỷ hoặc vô tỷ của x

Từ phần với $u = P(x)$, dv là biểu thức còn lại

Dạng 2: Hàm dưới dấu tích phân có dạng $P(x) \cdot \ln f(x)$

Từ phần với $u = \ln f(x)$, dv là $P(x) dx$

Dạng 3: Hàm dưới dấu tích phân có dạng $e^{ax+b} \cdot \sin(cx+d)$ (1) hoặc $e^{ax+b} \cdot \cos(cx+d)$ (2)

và $\sin[\ln(ax+b)]$ (3) hoặc $\cos[\ln(ax+b)]$ (4)

Từ phần hai lần, xuất hiện lại tích phân ban đầu với $u = e^{ax+b}$ hoặc $u = \sin(cx+d)$ ($u = \cos(cx+d)$) cho (1) hoặc (2) và $u = \sin[\ln(ax+b)]$ hoặc $u = \cos[\ln(ax+b)]$ cho (3) hoặc (4)

Dạng 4: Hàm dưới dấu tích phân phụ thuộc vào số tự nhiên n .

Từ phần bằng cách thiết lập công thức truy hồi.

Dạng 5: Hàm dưới dấu tích phân là tổng của hai hàm gồm một hàm có nguyên hàm đã biết hoặc dễ thấy và hàm kia thường có dạng gần với các dạng 1, 2, 3.

Nhận xét:

Nói chung:

- Với dạng 1, tùy theo bậc của $P(x)$, có thể phải dùng phương pháp tích phân từng phần nhiều lần hoặc dùng phương pháp truy hồi.
- Với dạng 2, tùy theo bậc của hàm logarit mà có thể phải tích phân từng phần nhiều lần và cuối cùng, $\int_a^b v du$ thường là tích phân của phân thức hữu tỷ.

Nói riêng: Một số tích phân cần đặt u một cách linh hoạt sao cho việc tính du và v dễ thực hiện, nhất là khi $P(x)$ là một phân thức (Xem minh họa ở phần III)

III. Một số bài tập minh họa các dạng trên:

$$1. I = \int_0^1 \frac{x.e^x}{(x+1)^2} dx \text{ (Dạng 1)}$$

Từng phần $u = x.e^x$, $dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx$ thì $I = \left. \frac{-xe^x}{x+1} \right|_0^1 + \int_0^1 e^x dx$ hay $I = \frac{e}{2} - 1$.

$$2. I = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx. \text{ (Dạng 2)}$$

Từng phần $u = \ln x$, dẫn đến việc tính $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{dx}{x(x+1)} = \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$. Kết quả $I = 0$

$$3. I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \cdot \sin 4x dx. \text{ (Dạng 3)}$$

Từng phần $u = e^{3x}$, $dv = \sin 4x dx$, được: $I = \frac{1}{4}(e^{\frac{3\pi}{4}} + 1) + \frac{3}{4} J$.

Với $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \cdot \cos 4x dx$, từng phần lần hai tương tự, được $J = -\frac{3}{4} I$. Suy ra $I = \frac{4}{25}(e^{\frac{3\pi}{4}} + 1)$

$$4. I = \int_1^{e^2} \sin \ln x dx \text{ (Dạng 3)}$$

Từng phần $u = \sin \ln x$, $dv = dx$, được $I = x \cdot \sin \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \cos \ln x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - J$

Từng phần lần hai tương tự, được $J = -1 + I$. Suy ra $I = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$

$$5. I = \int_0^1 (2x^3 - 8x^2 + 4x) e^{-x} dx \text{ (Dạng 4)}$$

Xét $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x} dx$. Khi đó $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \cdot e^{-x} dx$. Từng phần I_{n+1} với $u = x^{n+1}$, $dv = e^{-x} dx$, ta

được công thức truy hồi: $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ (*).

Áp dụng công thức (*) với $n = 0, 1, 2$ ta lần lượt được: $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$, $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$, $I_3 = 6 - \frac{16}{e}$.

Vậy $I = 2I_3 - 8I_2 + 4I_1 = 0$.

$$6. I = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx \text{ (Dạng 5)}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{e^x}{1+\cos x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{e^x \sin x}{1+\cos x} dx = I_1 + I_2.$$

$$\text{Từng phần } I_1 \text{ với } u = e^x, dv = \frac{1}{1+\cos x} dx = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$I_1 = e^x \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \tan \frac{x}{2} dx = e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{e^x \sin x}{1+\cos x} dx = e^{\pi/2} - I_2. \text{ Suy ra } I = e^{\pi/2}$$

IV. Bài tập áp dụng:

$$1) I = \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos^2 x dx \quad (I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}), \quad J = \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (J = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}),$$

$$K = \int_0^{\pi/3} \frac{x \cdot \sin x}{\cos^2 x} dx \quad (K = \frac{2\pi}{3} - \ln(2+\sqrt{3})), \quad L = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx \quad (L = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})),$$

$$M = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx \quad (M = e/3 + 1) \quad N = \int_0^{\pi/4} x \cdot \tan^2 x dx$$

$$2) \int_0^1 e^x \cos \pi x dx \quad \left(-\frac{e+1}{1+\pi^2}\right), \quad \int_0^1 e^x \sin^2 \pi x dx \quad \left(\frac{(e-1)(1+4\pi^2)}{2+8\pi^2}\right),$$

$$\int_0^{\pi/4} x \sin \sqrt{x} dx \quad \left(\frac{3}{2}\pi^2 - 12\right)$$

$$3) \int_1^2 x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx \quad \left(3\ln 3 - \frac{10}{3}\ln 2 + \frac{1}{6}\right), \quad \int_0^1 \ln(x^2+1) dx \quad \left(\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2\right),$$

$$\int_1^2 \frac{2x \ln x dx}{(x^2+1)^2} \quad \left(\frac{1}{2}\ln \frac{8}{5} - \frac{1}{5}\ln 2\right), \quad \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \ln(1+\cos x) dx \quad \left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x \ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} dx \quad \left(\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{9}\sqrt{2} - \frac{2}{9}\right)$$

$$4) \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}\right) dx \quad (e - e^2/2), \quad \int_0^1 \frac{1-\sin x}{1+\cos x} e^{-x} dx \quad \left(\frac{-1}{e^{\pi/2}}\right),$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{(1+\cos x)^{1+\cos x}}{1+\sin x}\right) dx \quad (\pi/2 - 1)$$

$$5) \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)}\right) dx \\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{(1+\cos x)^2} dx \quad \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{1+\cos x} \end{cases}$$

$$7) \quad R = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx \quad \text{Đặt} \quad \begin{cases} u = \sin^3 x \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3\sin^2 x dx \\ v = \frac{1}{2\cos^2 x} \end{cases}$$

$$8) \quad V = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx \quad \text{Đặt} \quad u = \begin{cases} u = x^2 e^x \\ dv = \frac{1}{(x+2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = x e^x (x+2) dx \\ v = -\frac{1}{x+2} \end{cases}$$

$$9) \quad G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{x^2} \left(x - \frac{e^{-x^2}}{(1+\cos x)^2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x e^{x^2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\cos x)^2} dx$$

$$10) \quad U = \int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x^8}{(x^4-1)^3} dx \quad \text{Đặt} \quad \begin{cases} u = x^5 \\ dv = \frac{x^3}{(x^4-1)^3} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 5x^4 dx \\ v = -\frac{1}{8(x^4-1)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = -\frac{x^5}{8(x^4-1)^2} \Big|_{-\sqrt{3}}^0 + \frac{5}{8} \int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x^4}{(x^4-1)^2} dx$$

$$\text{Để tính } U_1 = \int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{x^4}{(x^4-1)^2} dx \text{ lại đặt } \begin{cases} u_1 = x \\ dv_1 = \frac{x^3}{(x^4-1)^2} \end{cases}$$

$$11) \text{ Cho } I_n = \int_1^e x \ln^n x dx \quad (x \in N). \text{ Tìm hệ thức liên hệ giữa } I_{n+1} \text{ và } I_n. \text{ Tính } I_3.$$

$$(I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n, \quad I_3 = \frac{e^2 + 3}{8})$$

$$12) \quad I = \int_1^e x^2 (\ln x + \ln^2 x + \ln^3 x + \ln^4 x) dx \quad \left(\frac{56e^3 + 1}{81} \right)$$

$$13) \text{ Cho } I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx \quad (n \in N). \text{ Tìm hệ thức liên hệ giữa } I_n \text{ và } I_{n+2}. \text{ Tính } I_5 \text{ và } I_6. \text{ Từ đó}$$

$$\text{suy ra } J = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)^5 dx \quad (I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n. \quad J = \int_0^{\pi/4} \tan^5 x dx = I_5 = \ln \sqrt{2} - \frac{1}{4})$$

$$14) \text{ Cho } I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (n \in N). \text{ Chứng minh: } (2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1} \text{ với } n \geq 1$$

§ PHẦN 5: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Phương pháp tổng quát: Ngoài phương pháp xác định công thức diện tích bằng đồ thị, ta đều có thể phân miền diện tích cần tính bởi nhiều miền con, sao cho trong mỗi miền con ứng với $[a;b]$, phương trình: $f(x)=g(x)$ vô nghiệm trên $[a;b]$, sau đó ta sử dụng công thức diện tích trên mỗi miền con như sau:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|.$$

Tổng các diện tích miền con này là diện tích cần tính.

Ta có thể phân loại bài toán tìm diện tích hình phẳng theo số cận đã cho

S1 Loại 1: Biết 2 cận tích phân. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y=f(x)$; $y = g(x)$ và $x = a$; $x = b$

1. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành và các đường thẳng $x = -3$ và $x = -2$.

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = e$, $x = 1$

3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{1}{x(1+x^3)}$ trục Ox; $x=1$; $x=2$

4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$

5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $x = \frac{1}{e}$ và $x=e$.

6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (P): $y = x^2 - 2x + 2$ và tiếp tuyến của nó tại $M(3;5)$; $y = xe^{x/2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{x^2 - x + 6}{2x + 2}$ (C), Oy, tiệm cận xiên của (C), $x = 12$.

8. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}$; trục Ox
 $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi$

9. (ĐHBK HN 2000) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \pi/2$

10. (ĐHKT 2000) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = \frac{4x}{x^4 + 1}$; trục hoành; và hai đường thẳng $x = 1$; $x = -1$

11. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = xe^{\frac{x}{2}}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$.

12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số: $y = x \cdot e^x$; $y = e^x$; $x = 0$ và $x = e$.

13. (HVBCVT 2000) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = \left| 1 - 2\sin^2 \frac{3x}{2} \right|; y = 1 + \frac{12x}{\pi}; x = 0; x = \frac{\pi}{2}$$

14. (ĐHKT 94) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $y = |x^2 - 4x + 3|$; $y = 3 - x$

15 .(ĐHTL 99) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}; y = |x|$

16 . (ĐH Huế 99) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $x = 1$; $x = e$; $y = 0$; $y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

17 . (HVKTQS 2000) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$$y = \frac{1}{\sin^2 x}; y = \frac{1}{\cos^2 x}; x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}$$

18 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}; y = 0$ $x = 1; x = e$.

19 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x$, $y = x + \cos^2 x$, $x = 0$ và $x = b$

§ 2 **Loại 2: Chưa biết cận nào.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y = f(x)$; $y = g(x)$ (2 đường cong tự cắt).

Ta giải phương trình $f(x)=g(x)$, rồi xác định công thức diện tích

1 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ và trục hoành.

2 . Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ và đường thẳng $y = -x + 3$.

3 .(HVBCVT 97) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = -x^2 + 2x$; $y = -3x$

4 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số sau: $y = x^2$ và $y = |x|$.

5 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$; trục Ox;

6 . ĐH, CĐ khối A – 2007: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:
 $y = (e+1)x$, $y = (1+e^x)x$.

7 . Tham khảo khối B – 2007: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường
 $y = 0$ và $y = \frac{x(1-x)}{x^2+1}$.

8 . Tham khảo khối B – 2007: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường
 $y = x^2$ và $y = \sqrt{2-x^2}$.

9 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x$; $y = -x^2 + 4x$

10 Parabol $y^2 = 2x$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần. Tính diện tích mỗi phần đó.

11 Đề thi chung của Bộ GDĐT- khối A_2002

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$ ĐS:

$$\frac{109}{6} dvdt$$

12 . Đề thi chung của Bộ GDĐT- khối B_2002

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

13 Chứng minh rằng khi m thay đổi thì Parabol (P): $y = x^2 + 1$ luôn cắt đường thẳng (d): $y = mx + 2$ tại hai điểm phân biệt. Hãy xác định m sao cho phần diện tích giới hạn bởi đường thẳng và Parabol nhỏ nhất.

14 Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 8$ và Parabol (P): $y^2 = 2x$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường tròn.

15 Cho Parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm A, B chạy trên Parabol sao cho $AB = 2$. Tìm vị trí của A và B sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol (P) và đường thẳng AB có giá trị nhỏ nhất. ĐS: A(-1; 1), B(1; 1).

§ 3 **Loại 3: Biết 1 cận tích phân . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y = f(x)$; $y = g(x)$ và đường thẳng $x = a$. Một cận đã biết $x = a$, Ta tìm cận còn lại bằng cách giải pthđgđ: $f(x) = g(x)$, rồi xác định công thức diện tích**

- 1 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = e^x$, $y = 2$ và đường thẳng $x = 1$.
- 2 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $x = \frac{1}{e}$ và $x = e$.
- 3 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{8}$, $y = \frac{8}{x}$
- 4 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \frac{x-1}{x}$; $y = 0$; $x = 4$
- 5 . (ĐHTCKT 2000) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$
- 6 . (ĐHCD 99) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = x^2$; $y = \frac{x^2}{8}$; $y = \frac{8}{x}$
- 7 . (ĐHSP HN 2000) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = |x^2 - 1|$; $y = |x| + 5$
- 8 . $y = x^3 - 1$ và tiếp tuyến $y = x^3 - 1$ tại M(-1 ; -2) .
- 9 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x \ln x$, $y = \frac{x}{2}$ và đường thẳng $x = 1$
- 10 . Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: (C): $y = \sqrt{x}$; d: $y = 2 - x$ và trục Ox.

11 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị Ox, Oy , (C): $y = \frac{2x+1}{x-1}$

12 . (HVBCVT 99) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = 2^x$; $y = 3 - x$; $x = 0$

13 Đề thi chung của Bộ GDĐT- khối D_2002

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ

§ 4 **Loại 4: Diện tích bởi 3 đường . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y = f(x)$; $y = g(x)$; $y = h(x)$ (Chưa biết cận). Ta giải các phương trình**

$f(x)=g(x); g(x)=h(x); f(x)=h(x)$, dựa vào nghiệm các pt này xác định cận tích phân trong công thức diện tích, xác định các miền diện tích cần tính. Nếu thuận lợi nên vẽ cụ thể đồ thị 3 hàm số, căn cứ đồ thị để tính diện tích từng phần rồi cộng lại.

- 1 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số: $y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0$
- 2 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau: $y = \ln x, y = \frac{x}{e-3} + \frac{3}{3-e}, y = 0$.
- 3 . Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = x^2 - 2x$ và hai tiếp tuyến với đồ thị của hàm số này tại gốc tọa độ O và A(4 ; 8)
- 4 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau: $y = x^2; y = 4x^2; y = 4$
- 5 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau: $y = x^2 - 2x + 2; y = x^2 + 4x + 5; y = 1$
- 6 . (HVQY 97) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi : $y = 0$; (C) : $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ và tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$
- 7 . Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x+1}$ có đồ thị là (C). Tính diện tích tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của (C) tại M(-2; 5).
- 8 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C): $y = -x^2 + 3x - 2$, $d_1: y = x - 1$ và $d_2: y = -x + 2$
- 9 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau: Đồ thị (C): $y = x^4 - x^2$, trục Oy và tiếp tuyến với đồ thị tại A(1 ; 0).
- 10 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau: Đồ thị (C): $y = x^3 - 1$ và tiếp tuyến với (C) tại điểm (-1 ; -2).
- 11 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau: (C): $y = -x^2 + 2x + 3$ và 2 tiếp tuyến tại 2 điểm A(0;3); B(3;0)
- 12 . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau: (C): $y = x^2 - 2x + 2$ và các tiếp tuyến xuất phát từ điểm A(3/2;- 1)

13 Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = \frac{x^2}{8}, y = \frac{27}{x}$

B. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

§ 1 THỂ TÍCH DO HÌNH PHẪNG QUAY QUANH OX

- 1 . Tính thể tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y = e^x + 1; y = 0; x = 0; x = \ln 4$ khi (H) quay quanh trục hoành.
- 2 . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\ln x$ và đường thẳng $x = e$ quay quanh trục Ox.
- 3 . Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi : $y = xe^x; x = 1; y = 0 (0 \leq x \leq 1)$ quay quanh Ox
- 4 . Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, trục tung và hai đường thẳng $y = 0, y = 1$.
- 5 (ĐHNN I 97) Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi : (D) : $y = \tan x; x = 0; x = \frac{\pi}{3}; y = 0$

- 6 .(ĐH XD 97) Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi : $y = x \ln x$; $y = 0$;
 $x = 1$; $x = e$ quay quanh Ox
- 7 .(ĐH XD 94) Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi : $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ quay quanh Ox
- 8 .(HVKTQS 99) Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi : $y = 0$;
 $y = \sqrt{1 + \cos^4 x + \sin^4 x}$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \pi$ quay quanh Ox
- 9 . Tính thể tích của khối tròn xoay được sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường : $y = \sqrt{\sin x (e^{\cos x} + \sin x)}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$ khi nó quay quanh trục Ox.
- 10 . (ĐH, CĐ khối B – 2007): Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường $y = x \ln x$, $y = 0$, $y = e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.
- 11 . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = 6 - |x|$.
- 12 . Tính thể tích các vật thể tạo nên khi quay quanh Ox hình phẳng S với S được giới hạn bởi:

1) S là (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2) S là $x^2 + (y - b)^2 = a^2$

3) (C) : $y = \frac{1}{\cos x}$; trục Ox ; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$

4) (C) : $y = \frac{4}{x - 4}$; trục Ox ; $x = 0$; $x = 2$

5) $y = 0$; $y = \sqrt{\cos^2 x + x \sin^2 x}$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$

6) Hình tròn $x^2 + (y - 2)^2 \leq 1$

7 Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi

$x = \sqrt{\cos^6 x + \sin^6 x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$

§ 2 THỂ TÍCH DO HÌNH PHẪNG QUAY QUANH OY

1. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục Oy: $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$, $y = 0$.
2. Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng (H) quay quanh trục Oy và hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị:
 a) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.
 b) $y = x^2 - 4x + 3$, $y = -1$, $y = 3$.
3. Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng (H) quay quanh trục Oy và hình phẳng (H) giới hạn bởi các đồ thị:
 a) $y = x^2 - 4$, $y = -1$, $y = 1$; $x = 0$.
 b) $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$.
4. Cho hình tròn có tâm I(2, 0), bán kính R = 1, quay quanh trục Oy. Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo nên.
5. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi giới hạn bởi các đường: $y = \sqrt{3x + 1}$; $y = 1$; $y = 0$ khi nó quay quanh trục Oy.